Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2014 S-2DM ex ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Fredag den 24. januar 2014

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{C}$ betragter vi fjerdegradspolynomiet $P_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall z \in \mathbf{C} : P_a(z) = z^4 + (5-a)z^3 + (8-5a)z^2 + (4-8a)z - 4a.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + (5-a)\frac{d^3x}{dt^3} + (8-5a)\frac{d^2x}{dt^2} + (4-8a)\frac{dx}{dt} - 4ax = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 4x = 48e^{2t}.$$

(1) Vis, at tallene $z = -1$ og $z = a$ er rødder i polynomiet P_a.

Løsning. Ved indsættelse af tallene $z = -1$ og $z = a$ i polynomiet P_a ser vi, at disse tal er rødder i dette polynomium.

(2) Bestem samtlige rødder i polynomiet P_a for et vilkårligt $a \in \mathbf{C}$, og angiv røddernes multiplicitet.

Løsning. Ved polynomiers division finder vi, at

$$\forall z \in \mathbf{C} : P_a(z) = (z+1)(z-a)(z^2 + 4z + 4),$$

og vi ser dernæst, at polynomiet $P(z) = z^2 + 4z + 4$ har dobbeltroden $z = -2$.

Heraf får vi følgende: Hvis $a \neq -1$ og $a \neq -2$, har polynomiet P_a rødderne $-1, -2$ og a med multipliciteterne $1, 2$ og 1.

Hvis $a = -1$, har polynomiet P_a rødderne -1 og -2, som begge har multipliciteten 2.

Hvis $a = -2$, har polynomiet P_a rødderne -1 og -2 med multipliciterne 1 og 3.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$ for ethvert $a \in \mathbf{R}$.

Løsning. Hvis $a \neq -1$ og $a \neq -2$, er den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} + c_4 e^{at}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Hvis $a = -1$, er den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} + c_4 t e^{-t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Hvis $a = -2$, er den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} + c_4 t^2 e^{-2t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

(4) For hvilke $a \in \mathbf{R}$ er differentialligningen $(*)$ globalt asymptotisk stabil?

Løsning. Differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $a < 0$.

(5) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} + c_4 e^{t} + e^{2t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Opgave 2. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}.$$

(1) Idet det oplyses, at $\lambda = 2$ er en egenværdi for matricen A, skal man finde matricens øvrige egenværdier og bestemme egenrummene for enhver af egenværdierne.

Løsning. Matricen A har det karakteristiske polynomium $P_A(t) = -t^3 + 11t^2 - 36t + 36$, og ved indsættelse af tallet $\lambda = 2$, ser vi, at dette tal er en rod i P_A. Desuden får vi dernæst, at

$$P_A(t) = (t-2)(-t^2 + 9t - 18),$$

hvoraf det følger, at de øvrige karakteristiske rødder er 3 og 6.

Dette viser, at matricen A har egenværdierne $2, 3$ og 6.

De tilhørende egenrum er

$$V(2) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\},\ V(3) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \text{ og } V(6) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}.$$

(2) Bestem den fuldstændige løsning for vektordifferentialligningen (§).

Løsning. Den fuldstændige løsning for vektordifferentialligningen (§) er:

$$\mathbf{z} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

(3) Bestem den specielle løsning $\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}(t)$ til vektordifferentialligningen (§), så betingelsen $\tilde{\mathbf{z}}(0) = (1, 2, 3)$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at

$$\tilde{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{6t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{f}(x, y) = \big(x^2 + y^2, 2xy\big).$$

(1) Bestem Jacobimatricen (funktionalmatricen) $D\mathbf{f}(x, y)$ for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Jacobimatricen er

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

(2) Bestem de punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, hvor Jacobimatricen $D\mathbf{f}(x, y)$ er regulær.

Vi ser, at $\det\big(D\mathbf{f}(x, y)\big) = 4x^2 - 4y^2$, så Jacobimatricen er regulær, hvis og kun hvis $x \neq \pm y$.

(3) Betragt vektoren $v_0 = (1, 0)$.

Løs ligningen

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{f}(v_0) + D\mathbf{f}(v_0) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$$

med hensyn til (x, y).

Løsning. Idet $\mathbf{f}(1, 0) = (1, 0)$, og idet

$$D\mathbf{f}(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

finder vi, at $x = \frac{u+1}{2}$ og $y = \frac{1}{2}v$.

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 y + y^2,$$

og korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{for } x < 0 \\ [0, 1], & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ [0, 2], & \text{for } x \geq 1 \end{cases}.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at F har afsluttet graf egenskaben, thi grafen for F er en afsluttet mængde i $\mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

Løsning. Vælg en følge (x_k) hvor $x_k < 0$ og sådan, at $(x_k) \to 0$. Det er nu klart, at der ikke findes en konvergent følge (y_k), så $(y_k) \to 1 \in F(0)$ og $y_k \in F(x_k)$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$. Dette viser påstanden.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

Løsning. Dette er klart, thi F har afsluttet graf egenskaben, $F(x) \subset [-1, 3]$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$, og mængden $[-1, 3]$ er kompakt.

(4) Bestem en forskrift for værdifunktionen $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : V(x) = \max\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}.$$

Løsning. Vi får, at

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < 0, \text{ hvor } y = 0 \\ x^2 + 1, & \text{for } 0 \leq x < 1, \text{ hvor } y = 1 \\ 2x^2 + 4, & \text{for } x \geq 1, \text{ hvor } y = 2 \end{cases}.$$

(5) Bestem en forskrift for maksimumskorrespondancen $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : M(x) = \{y \in F(x) \mid V(x) = f(x, y)\}.$$

Løsning. På baggrund af resultatet i det foregående spørgsmål får vi, at

$$M(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{for } x < 0 \\ \{1\}, & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ \{2\}, & \text{for } x \geq 1 \end{cases}.$$